Prof. Dr. Alfred Toth

Inversion, Dualisation und Triangulation

1. Eine triangulierte Kategorie ist jede Menge, für die das folgende Diagramm kommutiert (vgl. z.B. Kashiwara und Schapira 2006, S. 243):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

2. Wie man jedoch leicht erkennt, erzeugen die Transitionsfunktoren f, g, h und f[1] eine Klasse, welche die invertierten Subzeichen, aber nicht die ganze invertierte Triade erzeugt:

Zkl°(3.a 2.b 1.c) = (a.3 b.2 c.1),

d.h. wir haben

(3.a) $\rightarrow_f$ (a.3)

(2.b) $\rightarrow_g$ (b.2)

(1.c) $\rightarrow_h$ (c.1),

was wir jedoch für die Dualiation einer Zeichenklasse haben müssen, ist

$$\begin{tikzcd}
(3.a) \arrow[rdd] & (a.3) \\
(2.b) \arrow[r] & (b.2) \\
(1.c) \arrow[ruu] & (c.1).
\end{tikzcd}$$

Dabei ist jedoch, wie sogleich einleuchtet:

(3.a) → (c.1) := f[-1]

(2.b) → (b.2) := g[1] = g[-1)

(1.c) → (3.a) := h[-1],

d.h. um anstatt der Inversionen der Dyaden die Dualisation der Triade zu erreichen, genügt es, die triangulierte Kategorie wie folgt umzuschreiben:

(3.a) $\to_u$ (2.b) $\to_v$ (1.c) $\to_w$ (3.a 2.b 1.c)[1]

$\downarrow_{-f}$ $\downarrow_{-g}$ $\downarrow_{-h}$ $\downarrow_{-f[1]}$

(c.1) $\to_{u'}$(b.2) $\to_{v'}$(a.3) $\to_{w'}$(c.1 b.2 a.3)´[-1]

Dualisation der Dualisation (××(a.b) = (a.b)) ist also einfach –f(-1)(a.b),

denn die beiden Rotationsmöglichkeiten für triangulierte Kategorien sind ja:

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \quad \text{or} \quad Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z.$$

Bibliographie

Kashiwara, Masaki/Schapira, Pierre, Categories and Sheaves. New York 2006

9.12.2010